Innhold

Forord

Velkommen. Velkommen til *logiske metoder*. Denne boken er skrevet for deg som liker å tenke på og forstå ting. Den er ment som en introduksjon til vitenskapelig og matematisk tankegang, og den vil passe bra for deg som har begynt på, eller vurderer å ta, et universitets- eller høyskolestudium. Boken forutsetter svært lite bakgrunnskunnskap, og så lenge du er i stand til å lese og er interessert og villig til å lære, burde det gå greit å lære seg alt som står i denne boken. Mer spesifikt, trenger du ingen trening i matematikk fra skolen.

Matematikken i skolen og matematisk tenkning. Matematikken som læres bort i skolen er svært instrumentell og regelbasert. I denne boken er fokuset på matematisk tenkning, forståelse og det å selv bevise påstander. Dette er ikke det samme som å utføre beregninger, manipulere symboler eller sette inn i formler. Det handler mer om å oppdage mønstre, gjennomføre resonnementer, finne moteksempler og argumentere logisk. Det er å selv finne ut av hva som er sant og deretter argumentere for og bevise velformulerte påstander. Dette er en måte å tenke på og en aktivitet som både er ekstremt kreativ, utfordrende og avhengighetsdannende. Det å tenke logisk og systematisk er også nyttig ellers i livet, og målet med denne boken er å gjøre deg flinkere til det. Det du lærer her vil være et teoretisk fundament som du kan bygge videre på, og du kommer garantert til å møte mange av begrepene igjen senere.

Et logisk byggverk. Denne boken er et slags logisk byggverk; vi skal bygge opp det meste helt fra bunnen av, uten så mange antakelser, og forsøke å tenke over alt på en grundig og nøyaktig måte. Hvis du møter et ord eller begrep som du ikke forstår, er min intensjon at det enten skal være definert eller forklart tidligere i teksten eller være noe fra språket vårt som er såpass vanlig og velkjent at det ikke krever en definisjon. Det er derfor viktig at du stiller deg selv spørsmål underveis: *Hvorfor er det slik? Hva betyr dette? Hva er dette en egenskap ved?* Men dette betyr også at du må lese teksten nøye, fordi mye bygger på hverandre. Når noe først er nevnt, kan det være mye som bygger på det senere i teksten.

Forståelse. Målet med denne boken er at du skal oppnå større *forståelse*, men hva betyr det egentlig å forstå noe? Den ungarsk-amerikanske matematikeren *John von Neumann* (1903–1957) er blant annet kjent for å ha sagt: «I matematikk forstår du ikke ting. Du blir bare vant til dem.»

Her følger noen perspektiver på forståelse som kan være nyttige for deg når du leser videre i boken, samt forhåpentligvis i videre studier.

Forståelse via repetisjon og god tid. Forståelse og innsikt kommer i rykk og napp, og det tar tid å abstrahere og generalisere. Noe som ved første øyekast kan virke kaotisk og forvirrende, kan etter en stund vise seg å være fullt av mønstre, struktur og sammenhenger. For å oppnå forståelse og innsikt er du nødt til å lese definisjonene og eksemplene nøye, løse mange oppgaver, helt på egen hånd, og gi stoffet god tid.

Forståelse via detaljer eller via overblikk. Et interessant spørsmål er hvorvidt det er best å lære seg noe – og få forståelse for noe – «nedenfra» eller «ovenfra». Med nedenfra mener jeg at alt defineres via de minste bestanddelene, fra grunnleggende ord, symboler og begreper og så, via definisjoner, sammensetninger og strukturer, oppover. Med ovenfra mener jeg via intuisjon, bilder og eksempler, hvor detaljene fylles inn etter hvert; dette er som regel mye mindre formelt og litt mer som å se verden i et fugleperspektiv. Noen foretrekker å bygge opp alt nedenfra, og andre foretrekker det motsatte. Jeg har forsøkt å finne en mellomting i denne boken.

Forståelse via eksperimentering. *Du er herved oppfordret til å tvile på og spørre om absolutt alt.* Jeg vil at denne boken skal være en slags sandkasse hvor det er mulig å utforske abstrakte begreper og resonnementer uten at så mye står på spill. Det er mulig å oppnå mye forståelse og innsikt ved å eksperimentere, utforske og leke seg med faget på denne måten, og det man lærer seg slik, er overførbart til andre situasjoner hvor presis resonnering og vitenskapelig tankegang er viktig. *Du kan anta hva som helst, men du må ta konsekvensene av det.* Det interessante er hva som følger fra det du antar. Hvis du gjerne vil anta at uendelige mengder ikke finnes, eller at en bestemt påstand er sann, er det helt ok. Men du må være oppmerksom på at du også må akseptere konsekvensene av antakelsene, det som *følger* fra antakelsene.

Forståelse via motsetninger. Vi kan nærme oss et nytt fenomen positivt, ved å se på egenskaper som gjelder for fenomenet, men vi kan også nærme oss det negativt, ved å se på egenskapene som ikke gjelder for det. Det å tenke vekk noe – tenke på motsetningen – kan gi opphav til en bedre forståelse. Forsøk derfor i praksis å se på et fenomen både positivt og negativt: For å forstå hva X er, tenk på hva det motsatte av X er. *Hvis du ikke kjenner ytterpunktene eller grensene til et fenomen, kjenner du da egentlig fenomenet?*

Logikk. I tillegg til å være en innføring i matematisk og vitenskapelig tankegang, er dette en lærebok i logikk. Det er mange grunner til at det er både givende og nyttig å lære seg logikk. Her er noen av dem.

Logikk, syntaks og semantikk. Logikk gir oss en øvelse i å skille syntaks og semantikk fra hverandre. Syntaks betyr her tegn, symboler, strenger og formelle språk – det som representerer noe, mens semantikk betyr tolkning, mening, modeller og betydning – det som representeres. *Vi skiller skarpt mellom syntaks og semantikk.* Noe av essensen i matematikk er å representere noe med symboler. Uten en god forståelse av hva som er syntaks og hva som er semantikk, blir det svært vanskelig å resonnere om dette på en god og korrekt måte. Når noe først er representert i et logisk språk, åpner det seg mange muligheter og anvendelsesområder.

Logikk, anvendelser og algoritmer. Kunnskapsrepresentasjon og resonnering om kunnskap blir bare viktigere og viktigere, særlig på grunn av utviklingen av semantiske teknologier. Selv om logikkfaget er svært gammelt, er det kanskje først nå, med fremveksten av kraftige datamaskiner, at vi ser potensialet i logikk som et fag. Logiske metoder brukes i dag både i den teoretiske analysen av algoritmer, databaser og programmeringsspråk, og til å lage praktiske metoder og verktøy med stor nytteverdi.

Motivasjon. Du kommer sannsynligvis til å spørre deg selv: *Hva kan dette brukes til?* og *Hvorfor skal jeg lære dette?* Ett svar er at dette er en fleksibel verktøykasse med metoder som kan anvendes til mye. Men nettopp fordi det er så abstrakt, kan det være vanskelig å umiddelbart oppdage anvendelsene. Det er litt som med et batteri eller en lyspære; anvendelsesområdene er mangfoldige og forskjellige, og de avhenger av konteksten. Et annet svar er at du lærer deg matematisk *tankegang*. Den britisk-amerikanske matematikeren *Keith Devlin* (1947–) bruker en bil som metafor for å forklare dette: Skolematematikk er som å lære å kjøre bil, mens universitetsmatematikk er som å lære om hvordan biler fungerer, hvordan de kan repareres, og hvordan man kan designe og bygge sine egne biler. Et tredje svar er at dette er god trening, som både skjerper tankene og gjør oss i stand til å resonnere bedre. Ved å studere temaene i denne boken, løse oppgavene og finne ut av ting selv, øver du deg på noe du kommer til å gjøre resten av livet: lære og forstå.

Kontekst og avgrensning. Boken er basert på forelesningsnotatene til kurset *INF1080*, *Logiske metoder for informatikk*, som jeg holder ved Institutt for informatikk ved Universitetet i Oslo. I løpet av et kurs på ett semester, tilsvarende ti studiepoeng og som varer i omtrent tolv uker, dekker jeg mesteparten av innholdet i boken. Det er omtrent to kapitler per uke.

Det er mye som ikke får plass i en bok som dette, og det er mange av kapitlene som bare utgjør smakebiter på hele fagområder med sine egne kulturer, sjargonger og introduksjonsbøker. Målet mitt er ikke å komme til bunns i hvert kapittel, men at du skal få innblikk i en fascinerede, interessant og vakker matematisk verden, og at du skal få et solid fundament for å lese videre på egen hånd.

Bokens struktur. Boken er delt inn i mange små kapitler, med oppgaver på slutten av hvert kapittel, og intensjonen er at hvert kapittel utgjør en passe stor mengde med nytt stoff, enten til én forelesning eller én arbeidsøkt. Rekkefølgen og formatet for et nytt tema er omtrent alltid: motivasjon, definisjon, eksempler og diskusjon. Det viktigste her er definisjonene. Det er totalt 137 av dem, og de utgjør essensen av teksten; sørg for at du forstår alle definisjonene! Boken er med vilje fri for teoremer, lemmaer, korollarer og heftig nummerering, og grunnen er helt enkelt at det ikke trengs. Bakerst i boken finner du et stikkordregister og en liste over symboler som forekommer i boken.

Vanlige ord og typografiske konvensjoner. Jeg har forsøkt å bruke vanlige ord der hvor det lar seg gjøre og holde bruken av tekniske ord til et minimum. Unntakene er de ordene som er mye brukt i litteraturen, og som det er greit å kjenne til, eller som det er sannsynlig at du kommer til å møte i senere studier.

Eksempel Jeg har forsøkt å gi eksempler, både positive og negative, på alle ord, begreper og objekter som introduseres. Det er totalt 204 eksempler, og formålet med dem er å øke forståelsen og oppklare eventuelle misforståelser. De er markert med ordet **Eksempel** i margen. ♦

Oppgave Boken er full av oppgaver som du kan og bør løse selv. Totalt 64 oppgaver er plassert rundt omkring i teksten, og de er markert med ordet **Oppgave** i margen. I slutten av hvert kapittel er det også oppgaver, som oftest i stigende vanskelighetsgrad. Det er totalt 354 slike oppgaver, og de er laget for at du skal kunne øve deg. ♦

Løsning Noen av oppgavene i teksten har løsningsforslag, markert med ordet **Løsning** i margen. Men forsøk alltid å løse en oppgave selv, helt på egenhånd, uten å lese løsningsforslaget. *Hvis du ikke forsøker, hvordan kan du vite om du ville ha klart å løse den?* Hvis et løsningsforslag ikke er oppgitt, er det meningen at du skal forsøke selv, og at oppgaven ikke er altfor vanskelig. ♦

Symbolene ♦, ♦ og ♦ markerer slutten på henholdsvis eksempler, oppgaver og løsningsforslag.

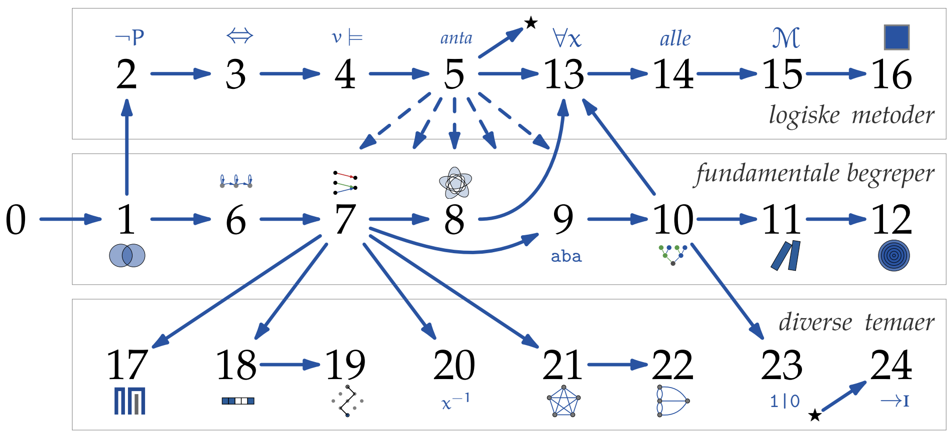
Digresjon

Boken inneholder 38 bokser med *digresjoner* som dette. Dette er anekdoter, historier og fakta som er mer eller mindre relevante. De fleste utdyper temaet som diskuteres i kapitlet, mens andre bare er kuriositeter. Noen er enkle å forstå, mens andre er ganske krevende. Felles for dem er at ingenting i teksten avhenger av dem, og det er derfor trygt – og kanskje lurt, hvis du leser teksten for første gang – å hoppe over dem. Hovedsaklig er de er ment som krydder, inspirasjon og rekreasjon!

Løsningsforslag. *Er det ikke noe løsningsforslag til oppgavene i slutten av kapitlene?* Nei. Tenk på oppgavene som trening. Det å lese et løsningsforslag uten å forsøke å løse en oppgave selv, er som om noen skulle ha tatt treningsøkten for deg. Du blir ikke sterkere av det. Hvis du ikke får til en oppgave, ikke gi opp. Forsøk igjen. Og igjen. Og en gang til.

Nettressurser. Denne boken har en egen nettside med ressurser som du kan finne på *nettressurser.no/logiskemetoder*. Hvis du har kommentarer eller tilbakemeldinger til boken, send en e-post til *logiskemetoder@universitetsforlaget.no*.

Avhengigheter mellom kapitlene. Følgende er en grov oversikt over hvordan kapitlene avhenger av hverandre; for eksempel kan du godt lese kapittel 6 uten å lese kapitlene 2–5 først. Kapitlene 0, 1 og 6–12 utgjør et matematisk fundament med de mest grunnleggende begrepene og definisjonene du trenger for å gjøre matematikk på egenhånd, og du kan se på dette som et minikurs i matematiske metoder. Kapitlene 2–5, 13–16 og 24 handler om logikk og tar for seg grunnleggende logiske begreper og metoder. Kapitlene 17–23 tar for seg forskjellige matematiske temaer, som kombinatorikk, grafteori, algebra og språkteori. Kapitlene 2–5 handler om utsagnslogikk og bevismetoder, og utgjør et fundament for resten av boken. Min anbefaling er å lese kapitlene i rekkefølge til du kommer til kapittel 7. Derfra er det mye mer fritt.



En stor takk. Jeg vil gjerne rette en stor takk til alle som har kommet med konstruktive innspill, kommentarer, oppgaver, løsningsforslag, og ikke minst masse *inspirasjon* underveis. Denne boken hadde ikke blitt til uten dere. Jeg vil også takke Universitetsforlaget for lærebokprisen og mange konstruktive og nyttige tilbakemeldinger. Mye av innholdet i denne boken har blitt til i *dialog* med kreative studenter, skarpe gruppelærere og dyktige medforelesere i løpet av de siste årene: Takk til dere alle; det er privilegium å jobbe med dere. Jeg vil også takke kollegaer, venner, familie og alle som har tatt seg tid til improviserte dialoger om rar og annerledes matematikk. Dere er en herlig blanding av familie, studenter, gruppelærere, kollegaer logikere og venner. En spesiell takk til: *Karin og Ingvald Antonsen*, *Julia Batkiewicz*, *Peter Brottveit Bock*, *Pia Maria Falkman*, *Jens Erik Fenstad*, *Jon Henrik Forssell*, *Martin Giese*, *Håkon Robbestad Gylterud*, *Christian Mahesh Hansen*, *Sigmund Hansen*, *Knut Hegna*, *Herman Ruge Jervell*, *Einar Broch Johnsen*, *Erlend Krog*, *Espen Hallenstvedt Lian*, *Marie Lilleborge*, *Håkon Salomonsen Møller*, *Andreas Nakkerud*, *Dag Normann*, *Olaf Owe*, *Julius Pedersen*, *Luna Wei Shen*, *Martin Georg Skjæveland*, *Inge Sandstad Skrondal*, *Martin Steffen*, *Martin Stensgård*, *Lars Kristian Maron Telle*, *Trond Thorbjørnsen*, *Evgenij Thorstensen*, *Eli Valheim*, *Arild Waaler* og *Stål Aanderaa*, *og i tillegg Andreas Reppesgård Askeland*, *Mathias Barra*, *Jørgen Bjørndal*, *Vilde Bøe*, *Torgeir Børresen*, *Kirsti Dalseth*, *Magnús Dæhlen*, *Magnus Røed Hestvik*, *Leif Harald Karlsen*, *Johan Wilhelm Klüwer*, *Lars Kristiansen*, *Aksel Ladegård Wester*, *Dag Langmyhr*, *Nouraddin Mostafapoor*, *Stener Nerland*, *Ragnhild Kobro Runde*, *Arne Skjærholt*, *Marte Stapnes*, *Øyvind Tangen* og *James David Trotter*, som alle på sin måte har bidratt til boken du nå har foran deg.

Lykke til. Jeg håper du vil lære masse matematikk, logikk og abstrakt tenkning ved å lese denne boken. Tenk at det er litt som klatring; du blir ikke god uten å *gjøre* det, og det er like givende *for deg* uansett på hvilket nivå du er. Lek med faget og vær nysgjerrig; anta noe og se hvor det bringer deg. *Kanskje oppdager du noe som ingen annen før deg har oppdaget. God lesning/tenkning!*

Blindern, juli 2014
Roger Antonsen