



Forord

På skolen er det mange som spør «Hvorfor må jeg lære dette?», spesielt i matematikktimene. Er du en av dem som stilte dette spørsmålet? Eller er du en av dem som sa til deg selv at «jeg får nok bruk for det en dag»? Uansett, vi påstår at grunnen til at du har lært om for eksempel andregradslikninger, parentesregler, funksjoner og derivasjon er for å forstå verden!

Det er nysgjerrighet som har brakt oss dit vi er i dag, og i utviklingen av dagens samfunn har matematikk spilt en hovedrolle. Faget vil fortsette å ligge til grunn for videre utvikling, og det gjør det spennende og utfordrende. All erfaring tilsier at du vil komme mye lenger i dine videre studier med en solid og trygg matematikkunnskap.

Denne boken er ment å bidra til denne kunnskapen: Med skolematematikken som grunnmur, skal vi for det første sørge for at den er så stø som mulig, ved å gi deg motivasjon til å fylle igjen eventuelle hull, og for det andre bidra til utbyggingen av ditt eget matematikkhus som du skal fortsette å møblere hele livet.

Matematisk verktøykasse krever ikke full fordypning i matematikk fra videregående, dvs. 3MX under Reform 94 eller Kunnskapsløftets R2. Men har du denne bakgrunnen, vil du fortsatt finne utfordringer her. Boken bygger på R1 (2MX) eller S1+S2 (2MZ+3MZ), og er ment å gi deg en matematisk verktøykasse for videre realfagsstudier, og å åpne opp for videre bruk av matematikk.

Stoffet i denne boken er valgt ut nettopp med hensyn på hva som kan passe i «en matematisk verktøykasse for videre realfagsstudier», og mengden stoff er tilpasset et 10 studiepoengs kurs.

Det er løsningsmetoder, studier av løsninger og anvendelser av tre typer likninger som er vårt fokus. Boken er således delt i tre deler:

Del 1 Lineære likningssystemer, vektorer og matriser. Kapittel 1–4.

Del 2 Differenslikninger. Kapittel 5–9.

Del 3 Differensiallikninger og modellering. Kapittel 10–13.

Det er lagt opp til at delene skal passe naturlig inn mellom «del 0» (skolematematikken) og «del 4» (veien videre). Hver av de tre delene vil bli nærmere presentert underveis.

Ordet *modellering* vil gå som en rød tråd gjennom boken, selv om temaet først får sin egen seksjon i siste kapittel. Å modellere et problem vil si å lage matematikk av det. Denne tankegangen (tekstopp-gave-tankegangen) er uhyre nyttig, men også veldig vanskelig. Håpet er at fremstillingen i denne boken skal gi deg utfordringer og hjelp i forhold til dette. Dette er en prosess du vil måtte jobbe videre med i studiene, men med denne boken har du sjansen til å komme et skritt videre i denne prosessen.

Målet er altså å gi deg en forståelse for hvordan ulike typer problemstillinger kan modelleres, og lære deg å finne løsninger på problemene. Eksempler på problemstillinger, som ikke krever spesial-kunnskap, er hentet fra flere fagfelt, for eksempel biologi og informatikk.

Matematikken du har som bakgrunn fra skolematematikken vil nå bakes inn i en større sammenheng. Sørg for å repetere / tette hull så fort det dukker opp stoff du føler du ikke husker godt nok.

Selve fremstillingen har ett mål for øyet: *at du skal bli trygg på stoffet i boken!* Dermed er boken skrevet omstendelig, med mye forklarende tekst og eksempler (og mye bruk av kommentarer i parenteser for å poengtere/påpeke). Videre er det lagt inn mange småsjekker merket «(sjekk!)» slik at du ikke skal stole blindt på det som står, men faktisk overbevise deg selv. Gjør det! Sjekkene skal også minne deg på at du ikke kommer langt i byggingen av matematikk-huset ditt uten litt svette (og fortvilelse). Ha alltid blyant og papir tilgjengelig når du leser matematikk!

I tillegg til all småsjekkingen underveis sjekker du din egen forståelse og skaffer deg (etter hvert) selvtillit og trygghet ved å løse oppgaver. Du vil finne følgende tester og oppgaver i boken:

- Tre **tester**, en etter hver av de tre delene.
- **Oppgavesamling** bak i boken, inndelt etter kapittel 1–13. Denne oppgavesamlingen inkluderer mange treningsoppgaver av ulik vanskelighetsgrad og noen tidligere eksamensoppgaver. Alle oppgaver her har fasit, og mange av dem har også utfyllende løsningsforslag. Noen av oppgavene er merket «Ekstra vanskelig».

Oppgavene er ikke laget (bare) for moro skyld, og et godt råd til deg er å prøve å gjøre *alle oppgavene*.

- **Eksamensoppgavesamling** bak i boken, inndelt etter del 1–3. Disse tidligere eksamensoppgavene er uten fasit.

Dessuten vil du for hvert kapittel finne en oppsummering under overskriften «Nå skal du kunne».

2. utgave

I 2. utgave er det gjort noen lokale endringer i forhold til 1. utgave:

Teksten er bearbeidet, og noe stoff er skrevet om (dette gjelder bl.a. parameterfremstilling og egenvektorer). Matrisespråket er også brukt litt mer aktivt enn i forrige utgave. Det er nå inkludert en formelsamling på innsiden av bokens permer. Boken har fått ny layout, og de ulike løsningsmetodene i boken er løftet litt mer frem.

Eksemplene blir i større grad «plukket opp», dvs. det minnes om hva de dreide seg om når vi refererer tilbake - i noen tilfeller er det satt inn sidetall også. Noen flere figurer, spesielt i kapittel 12 og 13, er inkludert.

Når det gjelder oppgavene, er disse beholdt med minimale forandringer, dvs. samme nummerering som i 1. utgave (kun et par er byttet ut / fjernet uten å påvirke nummereringen fra 1. utgave), bortsett fra at A-en foran alle nummerne er fjernet.

Send gjerne trykkfeil og kommentarer til bokens hjemmeside på www.universitetsforlaget.no.

Tusen takk!

Det er mange som fortjener takk! Før jeg takker, vil jeg gjerne bemerke at ansvaret for eventuelle feil og mangler i boken ligger hos meg, og personene jeg vil takke har (iallfall i mine øyne) bare bidratt til å betrygge leseren, spare hodebry og å gjøre boken bedre.

De tidligere eksamensoppgavene har først og fremst vært gitt ved Matematisk institutt ved Universitetet i Oslo (UiO), mens en del har vært gitt ved Institutt for matematiske fag ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim (NTNU) og tidligere Norges tekniske høgskole (NTH). Disse oppgavene er merket henholdsvis «(UiO)» og «(NTNU/NTH)». Jeg benytter herved anledningen til å si tusen takk til begge institutter for tillatelse til å inkludere disse oppgavene.

Boken du nå holder i hånden er basert på en trilogi av kompendier skrevet til begynnerkurset MAT1001 Matematikk 1 ved Matematisk

institutt ved UiO, høsten 2008. Til dette arbeidet fikk jeg kontinuerlige innspill og kommentarer, samt stoff, fra Erik Bédos, Arne B. Sletsjøe og Elisabeth Seland. Tusen, tusen takk for enestående og motiverende samarbeid.

Videre vil jeg umiddelbart takke Matematisk institutt ved Arne Bang Huseby og Yngvar Reichelt for muligheten til å involvere meg i matematikkundervisningen ved instituttet, noe jeg er utrolig takknemlig for, og Realfagsbiblioteket ved Live Rasmussen for å legge forholdene til rette for dette.

Tusen takk til Dina Haraldsson for hjelp med skriving av tidligere eksamensoppgaver, Kari T. Hylland og Håkon M. Briseid for bidrag til treningsoppgaver, og Tom Lindstrøm for tillatelse til å bruke noen av oppgavene i hans bok *Kalkulus* [8].

Det er flere som har jobbet gjennom stoffet før det ble til en bok, og som har kommet med verdifulle kommentarer. Tusen takk, alle sammen - spesielt MAT1001-studentene ved UiO høsten 2008.

Jeg vil takke for oppfordringer til å lage bok av kompendiene og for at jeg har fått muligheten til å utgi denne boken. Veien er dermed kort til å sende en stor takk til Universitetsforlaget og min redaktør Eli Valheim for råd og kommentarer. Ekstra takk til Eli for super mottagelse og støtte – både med 1. og 2. utgave.

I forbindelse med 2. utgave vil jeg spesielt takke Torgeir Onstad, Torgunn Karoline Moe og Arne B. Sletsjøe for meget nyttige og verdifulle kommentarer, og Vegard Brekke for en strålende jobb med layout! Også stor takk til Marte Stapnes ved forlaget for flott innspurt.

Videre sier jeg tusen takk til David Borge, Lise Borge, Richard Borge, Robin Bjørnetun Jacobsen, Liv Sissel Grønmo, Nils Voje Johansen, Eivind Knudsen, Marie Moltubakk, Geir Myklebust, Jorun Nyléhn og Ingebjørg Smestad for gode råd og motivasjon.

Matematisk verktøykasse er et resultat av diskusjoner om matematikk og undervisning med mange som alle fortjener stor takk. En spesiell takk går til Snorre H. Christiansen for utrolig inspirerende diskusjoner!

Jeg er meget glad for å utgi 2. utgave av denne boken. Til alle som har lest og brukt boken: Jeg setter stor pris på og takker for alle tilbakemeldinger!

Boken har jeg tilegnet mamma, pappa og Richard for all deres støtte. Lykke til med lesingen! Jeg håper dere vil like boken.

Oslo, mai 2014

Inger Christin Borge



Innhold

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| Forord | | 7 |
| Del 1 | Lineære likningssystemer, vektorer og matriser | 15 |
| Kapittel 1 | Lineære likningssystemer | 17 |
| | 1.1 Lineære likninger | 18 |
| | 1.2 Vektorer og n -tupler | 19 |
| | 1.3 Løsningsmengde og parameterfremstilling | 22 |
| | 1.4 Lineære likningssystemer | 26 |
| | 1.5 Løsningsmetoder | 28 |
| | 1.6 Geometriske løsninger | 33 |
| | 1.7 Et viktig resultat | 36 |
| | 1.8 Nå skal du kunne | 37 |
| Kapittel 2 | Matriser | 39 |
| | 2.1 Definisjoner og regneoperasjoner | 40 |
| | 2.2 Regneregler og noen spesielle matriser | 45 |
| | 2.3 Anvendelse: Binære matriser og søkevektorer | 48 |
| | 2.4 Determinanten til en matrise | 51 |
| | 2.5 Matriselikninger | 53 |
| | 2.6 Nå skal du kunne | 54 |
| Kapittel 3 | Lineære likningssystemer og matriser | 55 |
| | 3.1 Den utvidede matrisen til et likningssystem | 56 |
| | 3.2 Et viktig bevis | 57 |
| | 3.3 Radoperasjoner | 58 |

| | | | |
|-------------------|-------|--|------------|
| | 3.4 | Redusert trappeform..... | 60 |
| | 3.5 | Gauss–Jordan-eliminasjon | 64 |
| | 3.6 | Et nyttig resultat | 69 |
| | 3.7 | Cramers regel | 72 |
| | 3.8 | Nå skal du kunne | 74 |
| Kapittel 4 | | Anvendelser av lineære likningssystemer..... | 75 |
| | 4.1 | Populasjonsdynamikk | 76 |
| | 4.2 | Egenverdier og egenvektorer | 82 |
| | 4.3 | Hva skjer i det lange løp for lineære sammenhenger? | 93 |
| | 4.4 | Nå skal du kunne | 105 |
| | | «Har du fått med deg del 1?»-test | 106 |
| Del 2 | | Differenslikninger | 107 |
| Kapittel 5 | | Tallfølger | 109 |
| | 5.1 | Tallfølger og konvergens | 110 |
| | 5.2 | Differenslikninger | 113 |
| | 5.3 | Nå skal du kunne | 119 |
| Kapittel 6 | | Første ordens lineære differenslikninger | 121 |
| | 6.1 | Homogene likninger..... | 122 |
| | 6.1.1 | Løsningsmetode..... | 123 |
| | 6.1.2 | Konvergens av løsninger | 125 |
| | 6.1.3 | Anvendelser | 126 |
| | 6.2 | Inhomogene likninger | 130 |
| | 6.2.1 | Løsningsmetode..... | 131 |
| | 6.2.2 | Konvergens av løsninger | 138 |
| | 6.2.3 | Anvendelser | 140 |
| | 6.3 | Nå skal du kunne | 143 |
| Kapittel 7 | | Komplekse tall og trigonometri..... | 145 |
| | 7.1 | Motivasjon | 146 |
| | 7.2 | Komplekse tall | 146 |
| | 7.3 | Vinkler og radianer..... | 155 |
| | 7.4 | Trigonometri | 159 |
| | 7.5 | Polarform | 162 |
| | 7.6 | Nå skal du kunne | 170 |

| | | |
|--------------|---|-----|
| Kapittel 8 | Andre ordens lineære differenslikninger | 171 |
| 8.1 | Homogene likninger | 172 |
| 8.1.1 | Løsningsmetode | 173 |
| 8.1.2 | Konvergens av løsninger | 182 |
| 8.1.3 | Anvendelser | 184 |
| 8.2 | Inhomogene likninger | 187 |
| 8.2.1 | Løsningsmetode | 188 |
| 8.2.2 | Konvergens av løsninger | 192 |
| 8.2.3 | Anvendelser | 193 |
| 8.3 | Nå skal du kunne | 198 |
| Kapittel 9 | Trær og nettverk | 199 |
| 9.1 | «Jo mer man kan, jo bedre» | 200 |
| 9.2 | Trær og Fibonacci-følgen | 200 |
| 9.3 | Boolsk algebra og nettverk | 205 |
| 9.4 | Nå skal du kunne | 218 |
| | «Har du fått med deg del 2?»-test | 218 |
| Del 3 | Differensiallikninger og modellering ... | 219 |
| Kapittel 10 | Funksjoner | 221 |
| 10.1 | Definisjoner | 222 |
| 10.2 | Om anvendelser | 225 |
| 10.3 | Polynomfunksjoner | 226 |
| 10.4 | Rasjonale funksjoner | 228 |
| 10.5 | Rotfunksjoner | 230 |
| 10.6 | Eksponential- og logaritmefunksjoner | 233 |
| 10.7 | Trigonometriske funksjoner | 234 |
| 10.8 | Sammensatte funksjoner | 244 |
| 10.9 | Nå skal du kunne | 245 |
| Kapittel 11 | Derivasjon og antiderivasjon | 247 |
| 11.1 | Derivasjon | 248 |
| 11.2 | Differensiallikninger | 256 |
| 11.3 | Antiderivasjon | 258 |
| 11.4 | Nå skal du kunne | 270 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Kapittel 12 | Differensiallikninger | 271 |
| 12.1 | Første ordens lineære difflikninger | 272 |
| 12.1.1 | Løsningsmetode..... | 272 |
| 12.2 | Separable difflikninger | 281 |
| 12.2.1 | Løsningsmetode..... | 282 |
| 12.3 | Andre ordens lineære homogene difflikninger med konstante koeffisienter..... | 288 |
| 12.3.1 | Løsningsmetode..... | 288 |
| 12.4 | Initialbetingelser | 296 |
| 12.5 | Nå skal du kunne | 303 |
| Kapittel 13 | Modellering | 305 |
| 13.1 | Matematiske modeller..... | 306 |
| 13.2 | Eksempler..... | 308 |
| 13.3 | Nå skal du kunne | 326 |
| | «Har du fått med deg del 3?»-test | 326 |
| | Tillegg | 327 |
| Tillegg A | Oppgaver..... | 329 |
| Tillegg B | Tidligere eksamensoppgaver | 359 |
| Tillegg C | Fasit og løsningsforslag..... | 389 |
| Tillegg D | Notasjon..... | 445 |
| Tillegg E | Det greske alfabetet..... | 447 |
| Tillegg F | Bibliografi | 449 |
| Tillegg G | Norsk-engelsk ordliste..... | 451 |
| Tillegg H | Register..... | 461 |